

DETERMINATION DES VITESSES CRITIQUES TRANSITOIRES D'UN ENGIN SUPERSONIQUE EN VOL ACCÉLÉRÉ

Par R. MAZET

Correspondant de l'Académie des Sciences
Directeur Scientifique à l'O.N.E.R.A.

et

E. BONNEAU

Chef de Groupe de Recherches à l'O.N.E.R.A.

Summary—Le deuxième étage d'un engin supersonique a été soumis à un rayonnement infra-rouge simulant l'échauffement cinétique du vol accéléré.

Pour l'obtention des éléments utiles au calcul des vitesses critiques transitoires, une excitation dynamique appropriée a permis de suivre l'évolution des modes propres de cette partie d'engin au cours du régime transitoire thermique.

Un calcul a donné, en l'absence de tout échauffement cinétique,

1°—les modes propres de l'engin complet responsables du flottement en vol libre,
2°—les modifications massiques et élastiques à apporter aux modes correspondants de la partie d'engin étudiée pour reconstituer les modes définis au 1°.

Les vitesses critiques de flottement aux divers instants du vol accéléré ont été ensuite déterminées en admettant que ces modifications massiques et élastiques n'étaient pas influencées par l'échauffement cinétique, puis comparées aux vitesses présumées de l'engin aux mêmes instants.

INTRODUCTION

LES engins rapides de l'Aéronautique moderne sont soumis à des effets thermiques qui modifient leurs caractéristiques vibratoires et dont il est nécessaire de tenir compte dans l'étude de leur stabilité aéroélastique (sécurité au flottement). Il est bien connu, notamment, qu'une accélération élevée dans le domaine supersonique provoque, par échauffement transitoire, une variation momentanée des rigidités structurales des surfaces portantes dont il est très difficile de prévoir la répercussion complexe sur les rigidités d'ensemble des modes propres et, par suite, sur les vitesses critiques.

Pour mettre l'engin à l'abri de toute surprise, il devient nécessaire de prendre en considération son programme de vol et les causes éventuelles

d'échauffement qui en résultent (accélération en régime supersonique, allumage de propulseurs, etc...). La méthode expérimentale classique doit alors être modifiée et adaptée à ce nouvel objectif.

L'objet de la présente communication est d'exposer une technique d'essais et de calculs mise au point à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques et d'en faire l'application au cas, effectivement traité, d'un engin volant en régime accéléré après séparation de son premier étage, celle-ci devant se réaliser aux environs de $M = 2$.

Pour l'essai de chauffage, simulant approximativement les conditions réelles de vol, seule, pour des raisons d'encombrement, la partie de l'engin intéressée par des effets thermiques éventuels a été soumise à l'expérimentation dans le four spécial de l'O.N.E.R.A. Cette partie différait de l'engin réel en vol libre sur deux points importants:

- 1^o—le fuselage était enlevé, ce qui correspondait schématiquement à la soustraction d'une masse inerte rigidement fixée en un point de la structure;
- 2^o—la partie retenue était fixée à un support métallique élastique du type "tripode," ce qui correspondait à l'addition de masses et de raideurs parasites.

L'une des étapes du calcul a consisté à reconstituer le comportement vibratoire de l'engin complet et libre, par corrections massiques et élastiques des résultats expérimentaux.

1. SIMULATION DE L'ECHAUFFEMENT CINÉTIQUE

1.1. *Méthode utilisée*

On sait qu'au cours de l'échauffement cinétique d'un engin en vol accéléré, l'inégalité des températures locales a pour effet de créer des contraintes thermiques, entraînant une variation de la rigidité de structure et, par suite, une variation de ses fréquences propres et de ses formes propres.

A un instant donné, ces caractéristiques vibratoires dépendent en général de la distribution actuelle des températures et de l'histoire de ces températures.

L'engin étudié étant susceptible d'accomplir plusieurs missions successives, il doit être calculé de telle sorte que les contraintes thermiques soient toujours inférieures à la limite d'élasticité.

Dans ce cas, où il n'existe ni plasticité, ni fluage, les contraintes thermiques et, par suite, les caractéristiques vibratoires ne dépendent que de la distribution instantanée des températures.

Il est alors possible de reproduire l'effet des diverses sources d'échauffement (couche-limite, propulseur...) en simulant les distributions de températures avec une échelle des temps différente de l'échelle des temps réels.

Pour l'engin dont il est question dans cette communication (rappelons que seule la partie intéressée par les effets thermiques était soumise à l'essai de chauffage), on ne connaissait que la température de bord d'attaque et la température de brillance de la tuyère.

Or, on sait que la variation de rigidité d'une structure chauffée dépend essentiellement de la valeur des gradients seconds de température et approximativement de la différence de température entre les points les plus chauds et les points les plus froids⁽¹⁾.

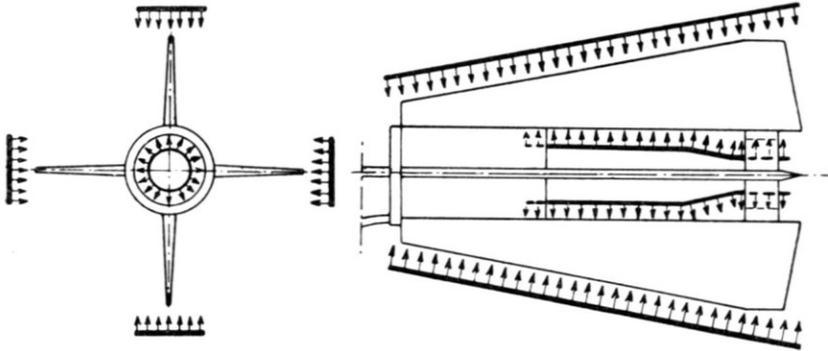


FIG. 1. Disposition des radiateurs infra-rouge.

Pour être à peu près certain, ou d'encadrer le vrai phénomène, ou d'être du côté de son exagération plutôt que de son atténuation, il a été adopté :

- (a) *deux programmes de chauffage*: correspondant à une montée plus ou moins rapide de la température de bord d'attaque et à un allumage des temps différents des radiateurs infra-rouges simulant la température de brillance de la tuyère en régime établi.
- (b) *Une disposition des radiateurs* infra-rouge tendant à accentuer les inégalités de températures: radiateurs répartis uniquement autour du bord d'attaque et à l'emplacement de la tuyère (Fig. 1).

1.2. Resultats d'essai

Des thermocouples disposés suivant Fig. 2 ont permis de contrôler les températures.

La Fig. 3 montre l'évolution de la température du bord d'attaque pour les deux programmes de chauffage et dans le cas de l'engin en vol.

En partant d'une même température de bord d'attaque, les courbes de la Fig. 4 donnent la correspondance entre les temps de l'essai et les temps de l'engin.

Les Figs. 5 et 6 montrent la distribution des températures dans une section d'aile (section 2). Dans le cas du chauffage I (Fig. 5), on peut voir que

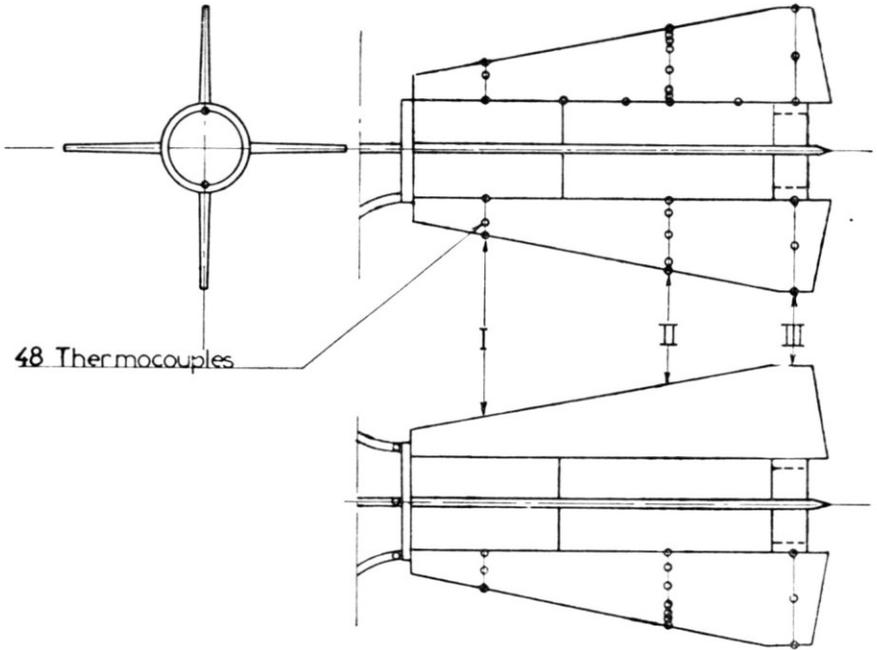


FIG. 2.

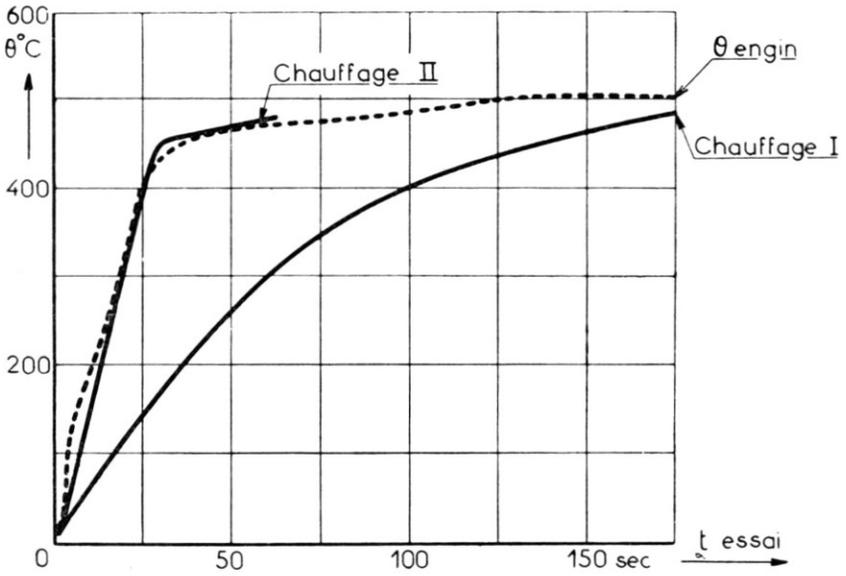


FIG. 3. Températures de bord d'attaque.

l'on a atteint entre les bords et le centre de la section une différence de température de l'ordre de 300°C alors que, dans le cas du chauffage II, cette différence atteint près de 400°C.

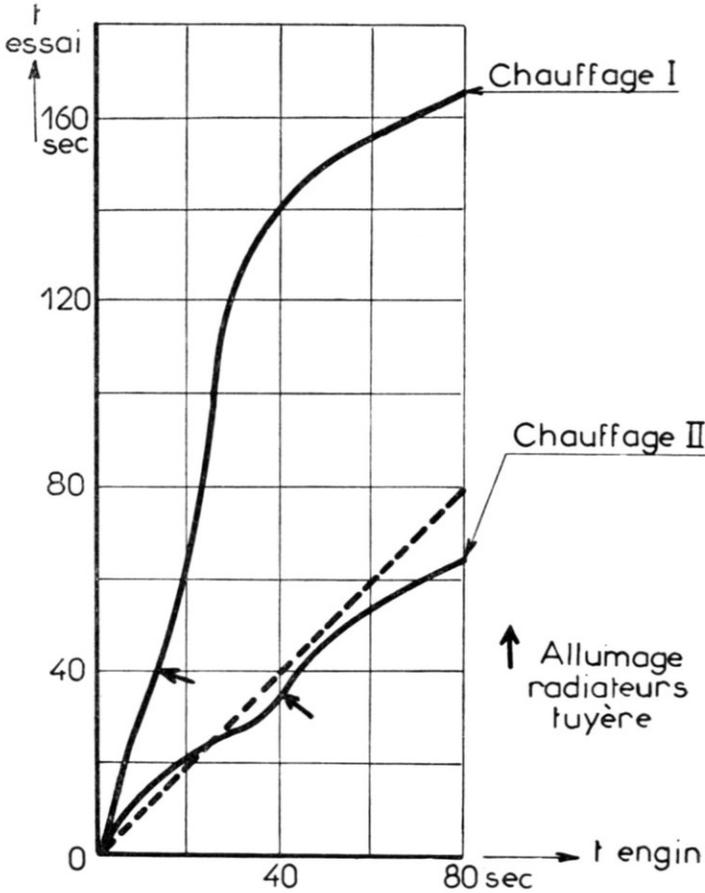


FIG. 4. Correspondance des temps essai et engin.

2. MESURE DES CARACTERISTIQUES VIBRATOIRES

2.1. Méthode utilisée

Le deuxième étage de l'engin a été fixé sur une suspension semi-rigide du type tripode. Il a été excité par 4 pots électrodynamiques et les vitesses de déplacement ont été mesurées en 34 points (Fig. 7).

Il a d'abord été procédé à la mesure des fréquences propres et des formes propres de l'engin non chauffé par la méthode classique des essais au sol⁽²⁾.

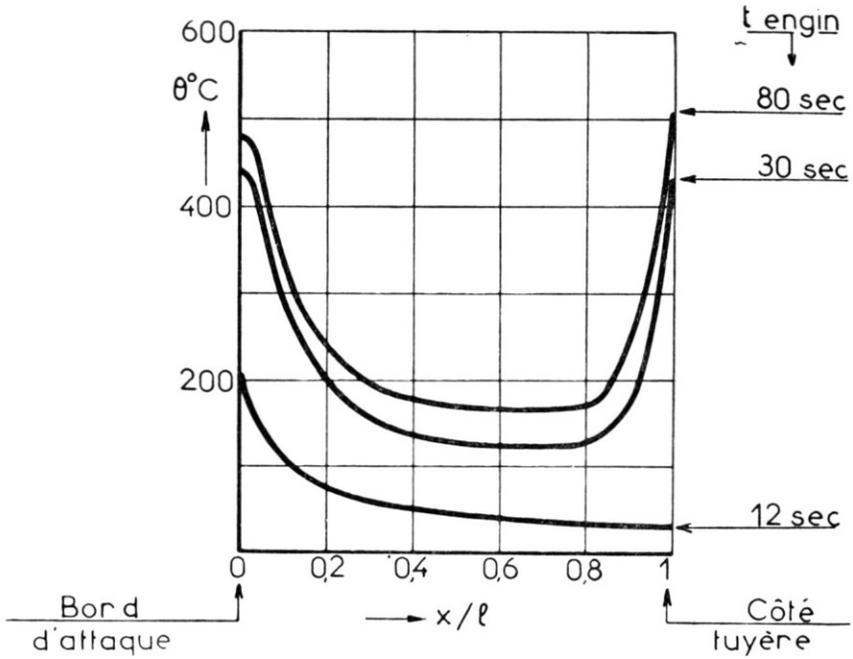


Fig. 5. Distribution des températures dans la section 2 (chauffage I).

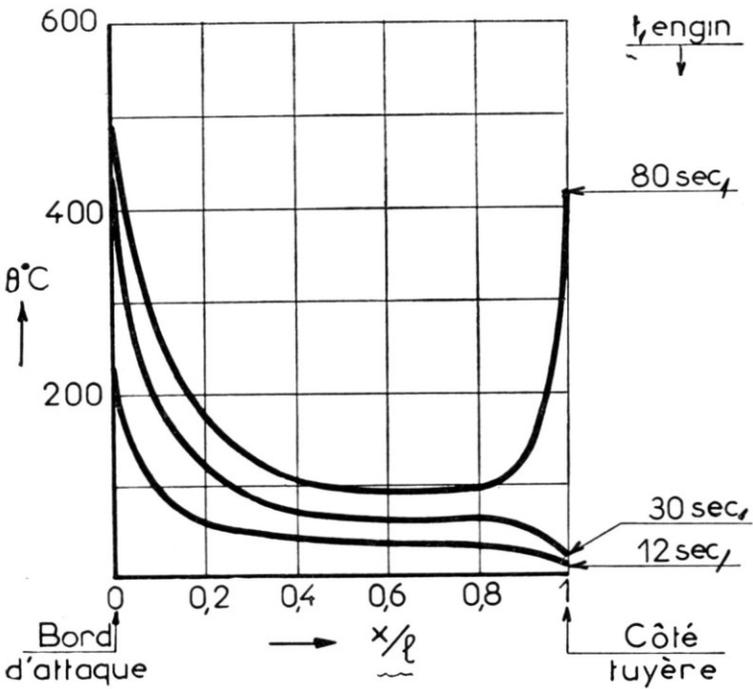


FIG. 6. Distribution des températures dans la section 2 (chauffage II).

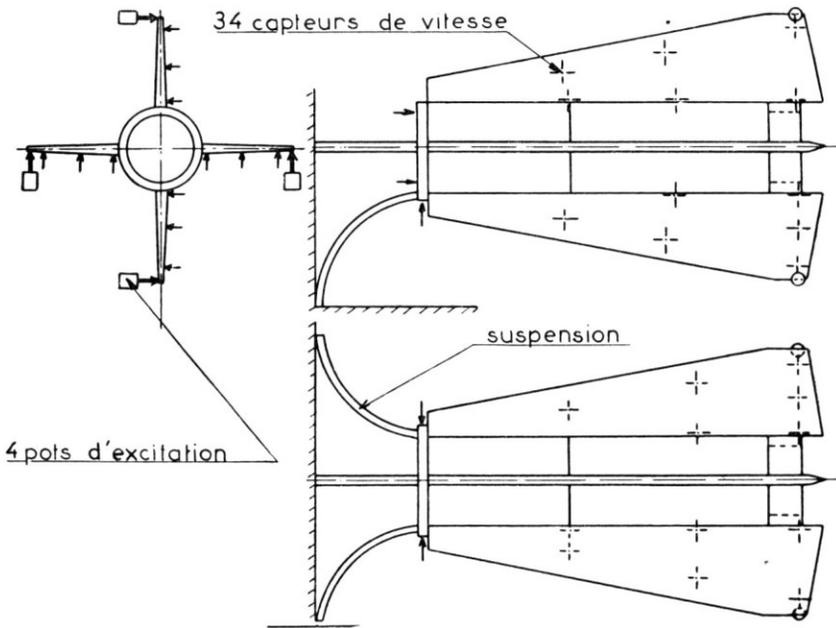


FIG. 7.

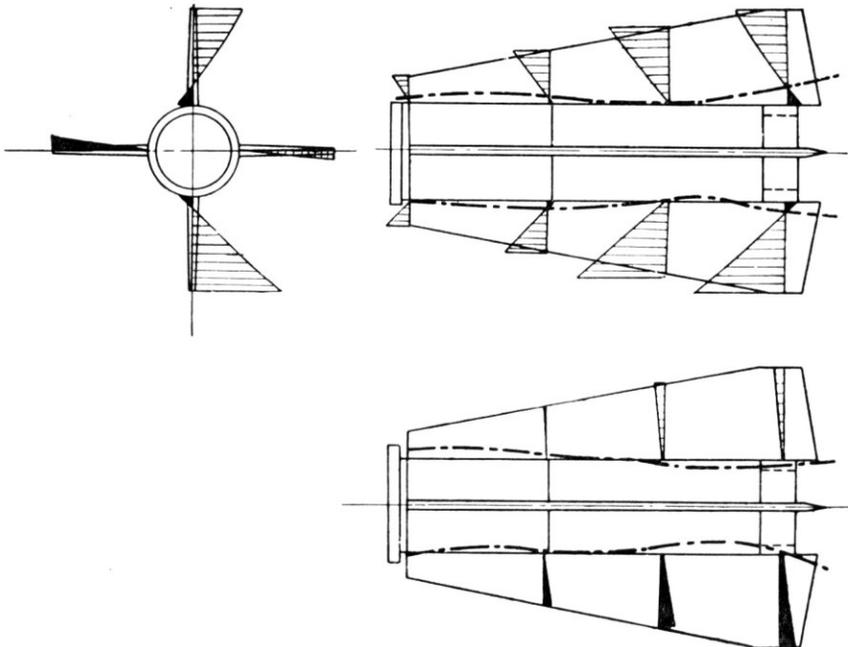
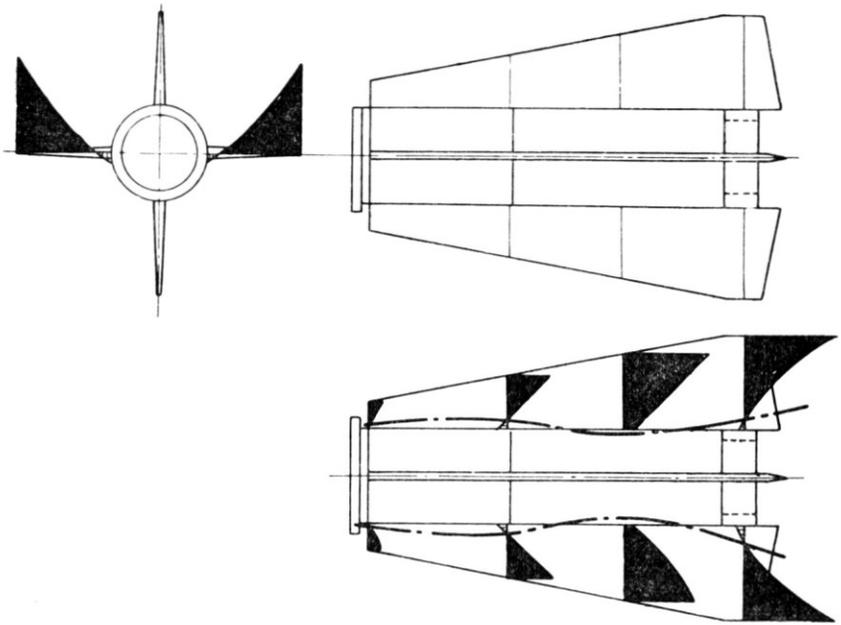
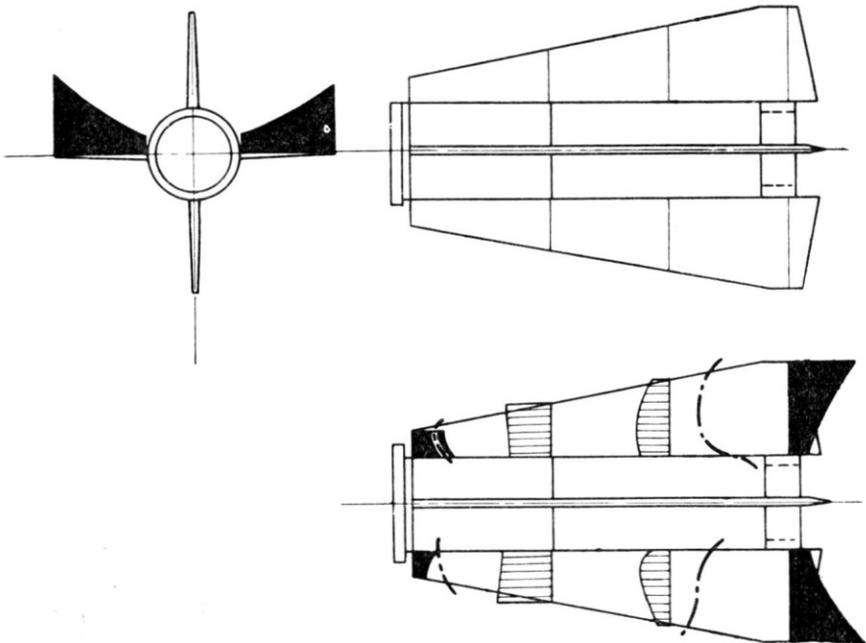


FIG. 8. Forme I $f_0 = 44,76 H_2$.

FIG. 9. Forme II $f_0 = 45,43 H_z$.FIG. 10. Forme III $f_0 = 66,67 H_z$.

Cet essai a permis de sélectionner les formes, au nombre de trois, qui participent le plus activement à un flottement éventuel de l'engin libre (cf. §3.3).

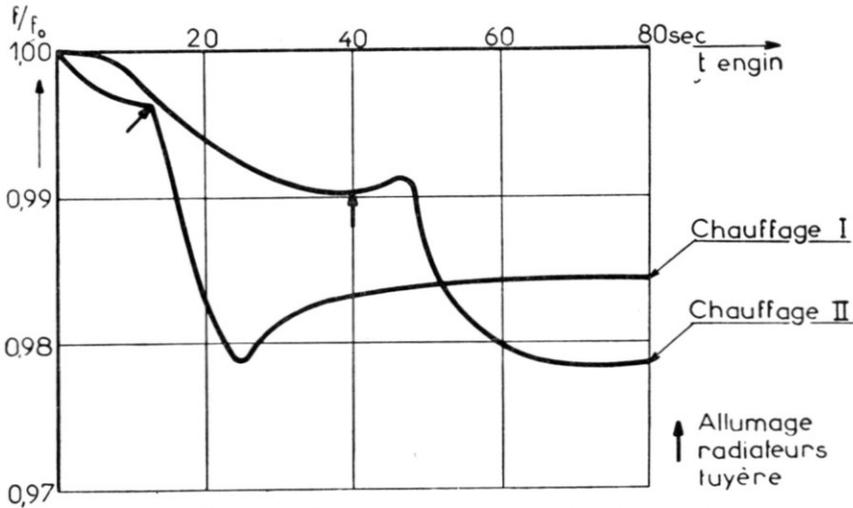


FIG. 11. Evolution des fréquences de la forme I $f_0 = 44,76 \text{ Hz}$.

Pour chacune de ces 3 formes, il a été ensuite effectué un essai avec simulation de l'échauffement cinétique. La méthode d'essai utilisée con-

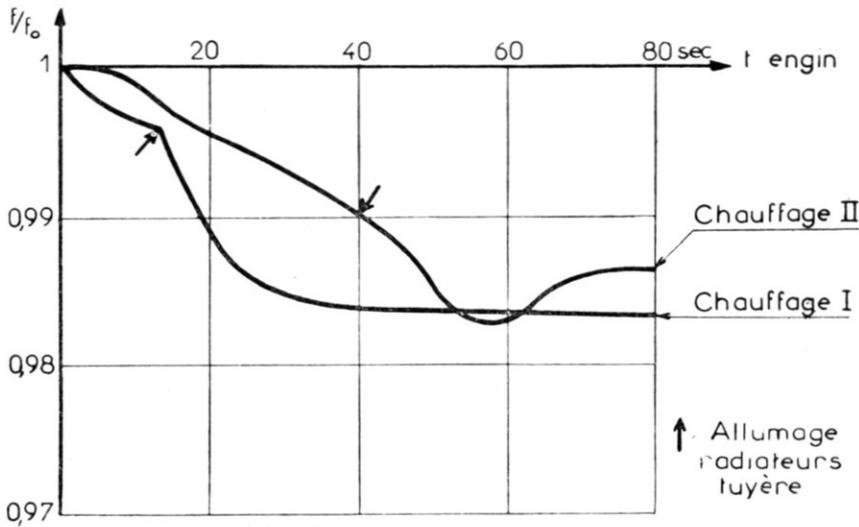


FIG. 12. Evolution des fréquences de la forme II $f_0 = 45,43 \text{ Hz}$.

siste à exciter en permanence la forme à la résonance de phase à l'aide d'un dispositif d'asservissement permettant de suivre l'évolution de la fréquence de résonance au cours du chauffage⁽³⁾.

L'évolution des formes propres a été suivie au moyen des capteurs de vitesse dont les signaux ont été enregistrés sur ruban magnétique.

2.2. Résultats d'essai

Les Figs. 8, 9, 10 représentent les 3 formes sélectionnées. Leur modification au cours du chauffage a été très faible (de l'ordre des erreurs de mesure) de telle sorte qu'on a pu admettre, dans les calculs, qu'elles restaient inchangées.

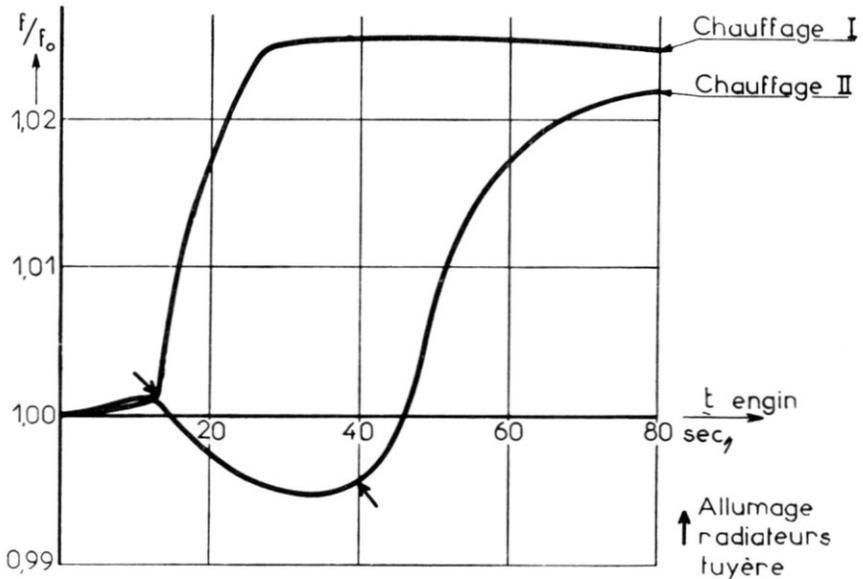


FIG. 13. Evolution des fréquences de la forme III $f_0 = 66,67 \text{ Hz}$.

Les Figs. 11, 12, 13 représentent l'évolution des fréquences de ces 3 formes pour les deux programmes de chauffage.

3. METHODE DE CALCUL DES VITESSES CRITIQUES

Le procédé expérimental exposé dans la première partie de ce rapport permet d'obtenir les modes propres d'une partie d'engin fixée sur un support rigide et leur évolution au cours du régime transitoire thermique. Or ce qui nous intéresse c'est le comportement vibratoire de l'engin complet en tant que corps libre: ce comportement vibratoire, compte tenu des efforts aérodynamiques, permet ensuite de déterminer les domaines d'instabilité aéroélastiques et, de ce fait, les vitesses critiques transitoires de l'engin libre en vol accéléré.

Il est toujours possible, connaissant les modes propres d'une partie d'engin suspendu, de déterminer les modes propres de l'engin complet

libre en procédant par addition et soustraction de masses et de raideurs à condition que ces masses et raideurs ne soient pas influencées par l'échauffement cinétique: cette condition est satisfaite dans notre cas puisque l'essai tel qu'il a été réalisé a consisté à soumettre, à l'échauffement simulé la partie d'engin effectivement influencée en vol libre tout en soustrayant le support tripode à cette influence. Cependant nous savons que la détermination des matrices additionnelles massiques I et élastiques R , permettant à partir de l'engin tronqué sur support de représenter l'engin libre en vol, requiert l'utilisation d'un nombre assez important de modes propres de la partie d'engin sur support pour obtenir une représentation convenable de l'engin en vol libre (14 dans l'exemple que nous avons traité). Or cela conduit à un volume de calculs assez important, car on est ainsi amené à reprendre le calcul complet de flottement un certain nombre de fois pour déterminer correctement l'évolution de la vitesse critique en régime transitoire. Cela conduit d'autre part à un volume d'essais non moins considérable puisqu'on doit suivre l'évolution d'un grand nombre de modes au cours du régime transitoire thermique.

Comme nous savons par expérience (et l'exemple que nous traitons ici le confirme) que les modes dangereux dans l'instabilité aéroélastique

Tableau de correspondance entre les modes engin libre (i) et les modes partie d'engin suspendu(k)

$(i) \backslash (k)$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0,007	0,007	0,011	-0,071	0,013	0,079	0,012	-0,027
2	-0,006	0,153	0,003	0,016	-0,036	0,003	0	-0,003
3	-0,105	0,010	0	0	-0,001	0,009	0,005	0,003
4	-0,003	0,077	0,002	0,009	-0,027	0,006	0,001	-0,002
5	-0,137	-0,013	-0,011	0,119	-0,023	-0,193	-0,011	0,032
6	0,071	-0,210	-0,005	-0,039	0,100	-0,017	-0,001	-0,002
7	0,388	0,018	0	0,009	-0,006	0	0,011	0,009
8	0	0,035	-0,800	-0,083	0,017	0,024	0,003	-0,006
9	0,004	-0,450	-0,024	-0,268	-1,656	0,038	0	-0,016
10	0,001	0,417	0,176	-2,367	0,194	-1,221	-0,124	0,256
11	0,009	-0,874	-0,028	-0,246	0,770	-0,191	-0,149	-0,113
12	0	0,012	0,011	-0,093	0,018	0,638	-3,772	0,160
13	-0,024	-0,020	0,067	-0,619	0,196	3,561	3,769	1,185
14	0,014	0,227	0,101	-0,755	0,069	2,712	0,612	-25,587

FIG. 14.

sont toujours en nombre assez restreint (3 dans le cas présent), il apparaît superflu de déterminer la vitesse critique par association de 14 modes, alors que 3 seulement ont une influence réelle sur sa valeur.

C'est pourquoi la méthode de calcul ci-après a été adoptée:

- 1°—Détermination, en l'absence de tout échauffement cinétique, des modes propres de l'engin complet libre à partir des modes propres de la partie d'engin suspendue.
- 2°—Détermination, en l'absence de tout échauffement cinétique, des vitesses critiques de l'engin libre et identification des formes propres du dit engin effectivement responsables du flottement.
- 3°—Identification des formes propres de la partie d'engin suspendue dont la participation aux formes propres définies au 2° est prédominante (Fig. 14).
- 4°—Détermination des modifications massiques et élastiques à apporter aux formes propres du 3° pour reconstituer les formes définies au 2°.
- 5°—Détermination des vitesses critiques de flottement aux divers instants du vol libre en admettant que les modifications massiques et élastiques du 4° ne sont pas influencées par l'échauffement cinétique, et comparaison avec les vitesses présumées de l'engin aux mêmes instants.

Ainsi donc, cette méthode ne nécessite qu'un seul calcul complet mettant en jeu l'ensemble des degrés de liberté de l'engin libre (1° et 2°); le reste des calculs ne fait intervenir qu'un nombre minimum de modes: d'où réduction du volume des calculs et, moyennant l'hypothèse introduite au 5° réduction du volume des essais.

3.1. *Détermination des modes propres de l'engin complet libre*

La détermination des modes propres de l'engin complet libre peut être faite soit par essai, soit par calcul en utilisant alors des résultats d'essais partiels. Dans l'exemple traité dans ce rapport la deuxième méthode a été utilisée. Un calcul, effectué de façon classique sur les 14 premiers modes propres de la partie d'engin suspendu, a permis de déterminer les 8 premiers modes propres de l'engin complet libre, les 6 degrés de liberté d'ensemble et d'établir les correspondances entre les modes engin suspendu et engin libre en l'absence de tout échauffement cinétique (voir tableau Fig. 14): ce calcul a été exécuté une fois pour toutes.

3.2. *Identification des formes propres de l'engin libre effectivement responsables du flottement*

Un calcul de flottement exécuté sur 7 formes propres engin libre (Fig. 15A), en l'absence de tout échauffement cinétique, en utilisant les coefficients aérodynamiques déduits de la méthode du piston au nombre de

Mach $M = 3$ a montré que seules prenaient une part active au flottement (Fig. 15B) les 3 formes propres suivantes:

2_L —Flexion ailes $n = 32,92$ Hz

4_L —Flexion ailes $n = 43,61$ Hz

5_L —Flexion ailes $n = 49,12$ Hz

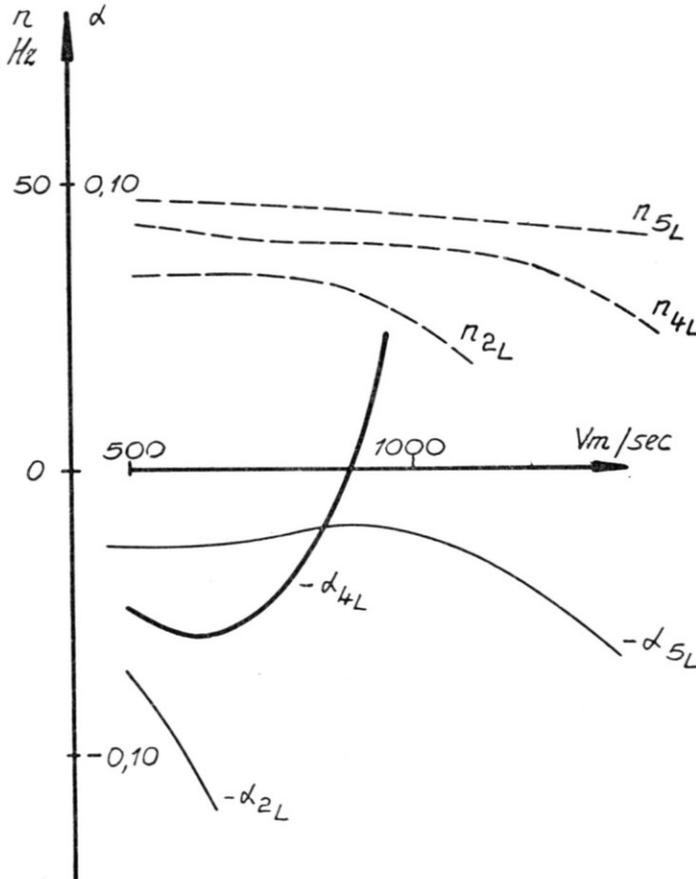


FIG. 15A. Calcul complet à 7 modes engin libre.

Si l'on désigne par

- μ_L la matrice des masses généralisées
- γ_L la matrice des raideurs généralisées
- ρ la masse spécifique de l'air à l'altitude considérée
- V la vitesse de l'engin par rapport au sol
- ρB_L la matrice des viscosités aérodynamiques généralisées
- ρC_L la matrice des raideurs aérodynamiques généralisées
- s la colonne des coordonnées généralisées

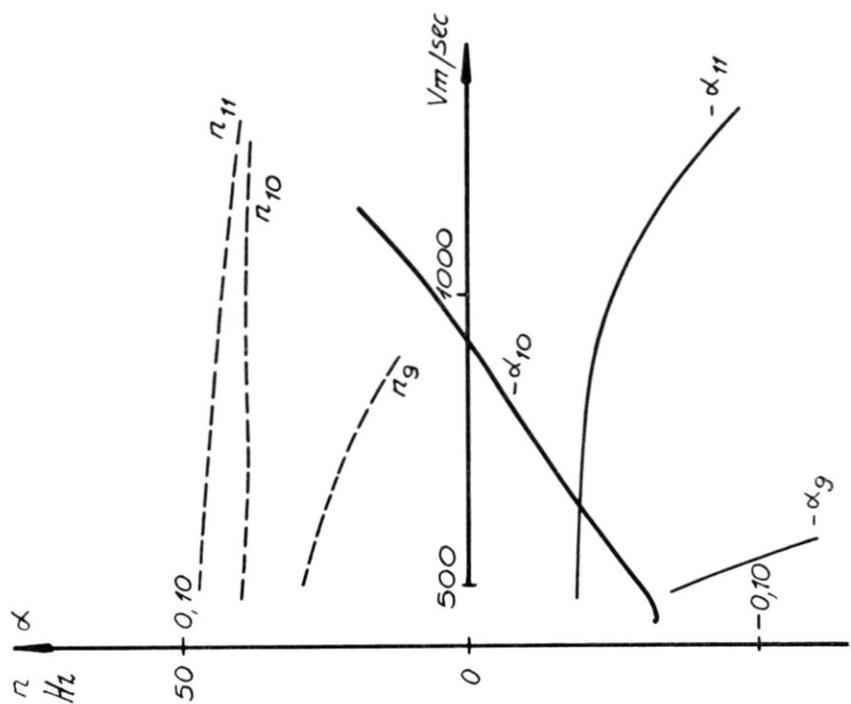


Fig. 15C. Calcul simplifié à 3 modes engin suspendu + correction de raideur et de masse.

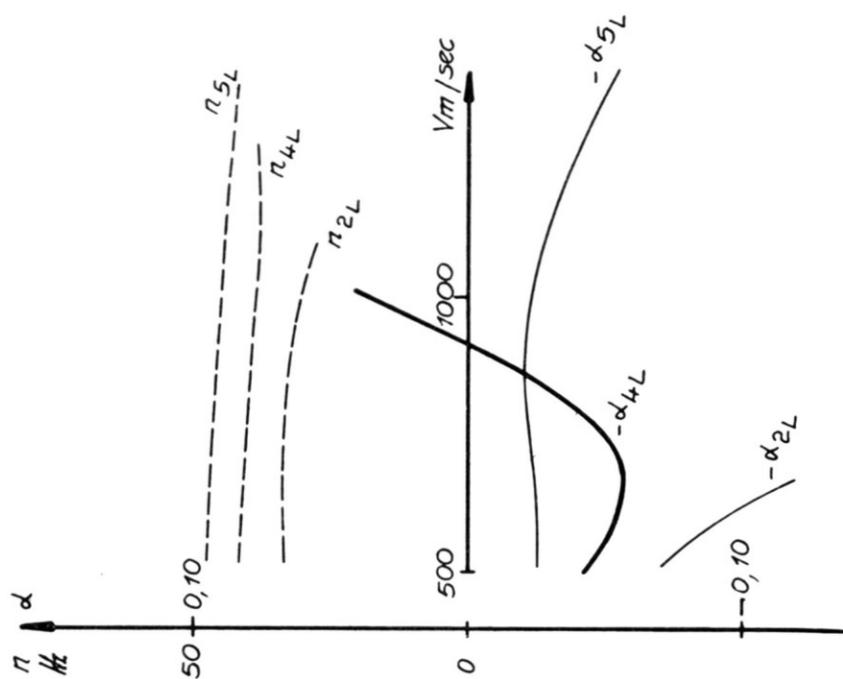


Fig. 15B. Calcul simplifié à 3 modes engin libre.

l'équation matricielle du flottement s'écrit

$$[\mu_L]\ddot{s} + [\rho B_L V]\dot{s} + [\gamma_L + \rho c_L V^2]s = 0 \quad (3.2.1)$$

3.3. Détermination des modifications massiques et élastiques à apporter aux modes correspondant de la partie d'engin

Le calcul auquel nous avons fait allusion en 3.1 nous a appris que les 3 formes—partie d'engin—ayant la participation la plus importante dans les 3 formes—engin libre—responsable du flottement étaient (Fig. 14):

9 — Flexion ailes	$n = 44,76$ Hz
10 — Flexion ailes	$n = 45,43$ Hz
11 — Torsion ailes	$n = 66,67$ Hz

L'équation matricielle du flottement—engin libre—obtenue à partir de l'équation matricielle du flottement—partie d'engin sur support—peut alors s'écrire (de même qu'en 3.2.1., nous avons négligé l'amortissement de structure):

$$[\mu + I]\ddot{q} + [\rho BV]\dot{q} + [\gamma + R + \rho CV^2]q = 0 \quad (3.3.1.)$$

Les matrices μ , γ sont les matrices de masses et raideurs généralisées engin sur support, I et R sont les matrices de modifications massiques et élastiques (en principe établies en 3.1.) qu'il faut adjoindre, à μ et à γ pour reconstituer les formes engin libre responsables du flottement.

Ayant volontairement réduit à trois formes le système schématisant l'engin libre, nous pourrions ne conserver de I et de R que les termes correspondant à ces formes. Mais le procédé d'extraction de ces termes serait long et peu précis. Il a paru préférable de déterminer directement les matrices de modification I' et R' relatives au système de remplacement en opérant comme suit:

Parmi les formes propres de l'engin suspendu, trois ont une participation prédominante à la constitution des trois formes propres de l'engin libre. Cela veut dire que certaines combinaisons linéaires de ces formes doivent permettre d'approximer avec une bonne précision les formes de l'engin libre. Soit T la matrice de changement de coordonnées exprimant au mieux les trois formes—engin libre—au moyen des trois formes—engin suspendu—prises comme formes de référence, nous avons alors:

$$q = TS \quad (3.3.2)$$

Identifiant les termes de 3.2.1. et de 3.3.1. (dans cette dernière, I et R sont remplacés par I' et R'), nous tirons

$$\begin{aligned} I' &= \bar{T}^{-1} \mu_L T^{-1} - \mu \\ R' &= \bar{T}^{-1} \gamma_L T^{-1} - \gamma \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

La matrice T répondant le mieux à cette condition a été déterminée par la méthode des moindres carrés en opérant sur quatre vingt points de chacune des formes considérées.

Un calcul de contrôle de flottement exécuté à partir des données de l'équation matricielle 3.3.1. en introduisant les coefficients aérodynamiques de la méthode piston au nombre de Mach $M = 3$ a donné une vitesse critique de flottement supérieure à celle obtenue à partir des données de l'équation 3.2.1., ce qui n'a rien qui puisse surprendre puisque la représentation des formes n'est pas rigoureuse; une correction globale sur les matrices $\mu + I'$ et $\gamma + R'$ a permis d'obtenir une meilleure correspondance en réalisant l'identité des vitesses critiques dans les deux cas (Fig. 15C).

3.4. Détermination des vitesses critiques aux divers instants du vol libre

L'équation matricielle 3.3.1.

$$[\mu + I']\ddot{q} + [\rho BV]\dot{q} + [\gamma + R' + \rho CV^2]q = 0 \quad (3.3.1.)$$

fournit alors les vitesses critiques transitoires aux divers instants du vol libre.

On suppose que I' et R' ne sont pas influencées par l'échauffement réel: cette hypothèse est plausible puisque le support de la partie d'engin

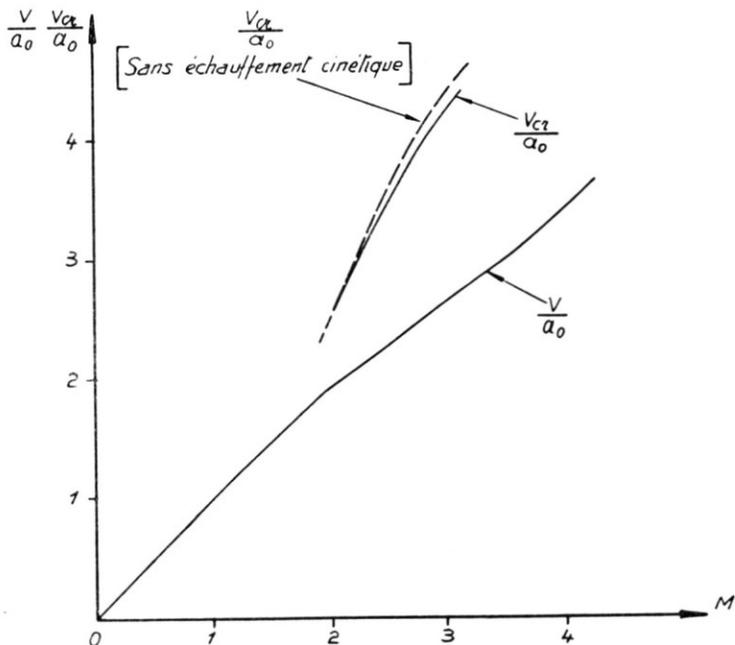


FIG. 16.

a été soustraite expérimentalement à l'échauffement (cinétique et thermique) simulé en laboratoire; d'autre part le fuselage (dont la masse a , au contraire, été ajoutée après coup) n'est pas lui-même grandement exposé aux effets thermocinétiques. On peut, dans ces conditions, admettre que les essais au laboratoire thermique sur la partie d'engin suspendue fournissent, à tout instant du vol libre, les éléments thermoélastiques (modifiant exclusivement les raideurs γ) de l'équation matricielle 3.3.1. De leur côté, les éléments aérodynamiques B et C sont calculés à partir des coefficients théoriques de la méthode du piston.

La résolution de l'équation matricielle 3.3.1. donne alors, à chaque instant t , connaissant le nombre de Mach M , la vitesse critique de l'engin V_{cr} . Sur la Fig. 16 nous avons porté $\frac{V_{cr}}{a_0}$ en fonction de M (a_0 étant la célérité du son au sol) dans les deux cas suivants:

- 1°—avec échauffement cinétique programme de chauffage I,
- 2°—sans échauffement cinétique.

Par ailleurs sur ce même graphique nous avons porté $\frac{V}{a_0}$ (V vitesse présumée de l'engin dans sa course en fonction du nombre du Mach présumé).

On voit que, dans le cas étudié et dans la gamme des nombres de Mach explorée, la première courbe $\frac{V_{cr}}{a_0}$ se situe partout au-dessus de la seconde courbe $\frac{V}{a_0}$: il n'y a donc aucun risque de flottement thermique ou autre.

L'échauffement cinétique ayant ici une influence globale relativement minime et la marge de sécurité étant relativement grande, il ne paraît pas utile de traiter le cas correspondant au programme de chauffage II, lequel donne des variations de fréquences propres du même ordre de grandeur que correspondant au programme de chauffage I.

4. CONCLUSION

La méthode exposée ci-dessus est une méthode simplifiée permettant de réduire de façon appréciable le volume des essais et celui des calculs.

Dans le cas de l'engin étudié, un contrôle de ce genre est suffisant puisqu'il montre que l'engin présente une bonne marge de sécurité au flottement même lorsqu'on tient compte des effets thermocinétiques.

Dans le cas où cette première approximation mettrait en évidence un danger d'instabilité aérothermoélastique dans le domaine de vol de l'aérodynamique, il y aurait lieu, d'une part de reproduire plus fidèlement l'évolution de l'échauffement cinétique réel, d'autre part d'introduire dans les calculs de substitution un nombre plus grand de degrés de liberté.

BIBLIOGRAPHIE

1. BONNEAU, E., Influence de l'échauffement cinétique sur la réponse vibratoire du mode de torsion d'une voilure, *Recherche Aéronautique*, n° 61—Nov.-Déc., 1957.
2. MAZET, R., Esquisse des bases théoriques de l'essai de vibration au sol. Rapport AGARD, n° 184-Avril, 1958.
3. DUCHENE, A., Appareillage d'asservissement permettant d'exciter un système de fréquence variable dans le temps, *Recherche Aéronautique*, n° 74-Janv.-Fév., 1960.

DISCUSSION

A. VAN DER NEUT: Je fus impressionné par la correspondance excellente entre la calcul avec 3 et 7 modes propres. Je voudrais demander a Monsieur Mazet comment on a pu choisir ces 3 modes principaux. Est-ce-que l'on a pu choisir ces 3 modes par avance on bien guide par les resultats du calcul avec les 7 modes propres.

RÉPONSE AU PROFESSEUR VAN DER NEUT:

Ce sont les résultats du calcul à sept modes propres qui ont guidé dans le choix des modes responsables du flottement par comparaison avec le même calcul effectué sur chacun des sept modes pris isolément (cf. C. BEATRIX, *Recherche Aéronautique*, No. 58, 1957). On détermine, en effet, dans un premier calcul où tous les p modes sont pris ensemble et couplés par les forces aérodynamiques, l'évolution des fréquences n_i et des amortissement a_i de ces p modes en fonction de la vitesse de vol; on détermine ensuite l'évolution n'_i, a'_i qu'auraient les mêmes quantités si toutes les forces de couplage, et elles seules, étaient supprimées. La comparaison des résultats permet d'établir le bilan des échanges énergétiques entre les p modes et, ainsi, de les classer en trois catégories: (a) modes recevant de l'énergie, (b) modes apportant de l'énergie, (c) modes indifférents.

Dans l'exemple traité, ce bilan, effectué sur l'association à sept modes, a montré que seuls participaient au risque de flottement les modes $2_L, 4_L, 5_L$, le premier fournissant de l'énergie aux deux autres. Le calcul, opéré en ne retenant que les trois modes en question, a confirmé ce pronostic.

JOHN H. ARGYRIS: Professor Mazet mentioned that in this present experimental investigation—so beautifully illustrated and interestingly presented in the lecture—three eigenmodes of the cantilever structure were sufficient to describe the dynamic behaviour of the elastic air-vehicle. Moreover, the author added that this no doubt great simplification was found to hold in all cases' so 'far strictly in his institute. Now, I feel that this may be so for relatively smooth and simple structures but cannot be accepted as a sufficiently accurate general rule (at least, this follows from my experience) for complex systems—say with change of taper major cut-outs, concentrated masses etc. In fact, I have one particular case in mind where more than eight eigenmodes were required to obtain a satisfactory representation.

Furthermore, I cannot quite understand the statement that (should a theoretical analysis be required in parallel with experimental evidence) the higher eigenmodes can only be found with considerable difficulty. Surely, since we can establish to-day with ease the dynamic matrix—even of a very complex system—on a digital computer and use a standard programme to derive a large number of eigenmodes this difficulty does not really exist and the inclusion of, say 15 or more modes does not present any problem. On the other hand, I may have misunderstood the author who may have had the possibility in mind when no digital computer is available.

With reference to the effect of kinetic heating it is interesting that for the present structure and temperature range it is found to be so small. Of course, it is well known

that for systems of high solidity (e.g. fins of miniles) the presence of thermal strains may change profoundly the flexibility or stiffness of the structure and give rise to a vibration pattern very different from that for a cold system. The dynamic behaviour is then, in fact, strongly non-linear.

RÉPONSE AU PROFESSEUR JOHN H. ARGYRIS

Réponse au 1er paragraphe—Dans l'exemple traité, il s'est trouvé que, d'une part, le flottement ne mettait en cause que trois modes propres de l'engin libre, d'autre part, ces modes propres pouvaient être obtenus avec une bonne approximation à partir de trois modes propres de la partie d'engin suspendue. Ces deux circonstances sont indépendantes l'une de l'autre. Il va de soi que la seconde n'est pas toujours possible et que l'on pourra être amené à faire intervenir plus de trois modes propres de l'engin suspendu. Chacun de ces modes devra être suivi au cours de l'échauffement cinétique simulé.

Quant à la première circonstance, elle correspond à un phénomène que nous avons toujours constaté sur les avions dont nous avons eu à nous occuper: le nombre des modes propres responsables d'un flottement est toujours très limité. Il faut entendre par mode propre tout mode de vibration sinusoïdale de l'avion entier dépouillé de son amortissement structural. Ces modes propres étant, par nature, entièrement découplés dans le vide, ne sont couplés en vol que par les forces aérodynamiques qui provoquent de l'un à l'autre des transferts d'énergie situés à l'origine du flottement (cf. C. Beatrix, Recherche Aéronautique, No. 58, 1957). Ces transferts d'autant plus intenses que les fréquences des modes dans le vide sont plus voisines. C'est ce qui explique qu'en fait deux, trois ou quatre modes aient une participation nettement prédominante (deux modes voisins et les deux modes qui les encadrent du point de vue des fréquences). Un cas qui ferait intervenir plus de quatre modes propres serait regardé par nous comme présentant pour l'avion une anomalie particulière en raison de l'accumulation défavorable de fréquence propres sur une bande étroite qu'il laisse supposer.

Je précise cependant que notre expérience concerne les modes propres relevés par essais au sol sur un avion effectivement construit et non les modes propres obtenus par orthogonalisation de modes "artificiels" calculés sur plans.

Réponse au 2ème paragraphe—Lorsqu'on détermine par le calcul les modes propres d'un système mécanique, on estime généralement qu'il faut traiter une matrice dynamique d'ordre $2n$ pour obtenir avec précision les n premiers modes propres (on met assez bien ce fait en évidence en prenant un système continu simple tel qu'une poutre encastree). J'ai simplement voulu dire que, quels que soient les moyens de calcul dont on dispose, l'obtention des modes supérieurs ne se fait qu'avec une augmentation sensible du volume des calculs et que, par suite, l'économie des modes superflus peut présenter, en pratique, de très réels avantages.

Réponse au 3ème paragraphe—Cette objection est tout à fait valable. Il est certain que le cas traité dans cette communication était particulièrement simple en raison de la grande rigidité et du faible allongement des surfaces portantes. Dans d'autres cas plus complexes, on doit examiner attentivement les modes propres de l'engin libre qui ne participent pas au flottement "à froid" et se demander si l'échauffement cinétique ne risque pas d'abaisser (plus rarement: d'élever) la fréquence de l'un d'eux jusqu'à l'introduire dans le groupe des modes "dangereux". En cas de doute, on inclura le mode suspect parmi ceux qui sont à suivre au cours de l'échauffement cinétique simulé.